1. Soit la suite (v_n) définie par

$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$, $n \geq 1$.

Montrer que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 \leq n^4$.

3. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$.

5. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

18 Soit (u_n) la suite définie par

$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n}, \ n \geq 1. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq 3$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

19 Soit (u_n) la suite définie par

$\begin{cases} u_0 = a \quad \text{où } a \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ u_{n+1} = \sin(u_n), \ n \geq 0. \end{cases}$

1. Etudier les variations sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $x \mapsto \sin x - x$.

2. En déduire que pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leq x$.

3. Montrer, par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

5. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

20 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

1. Etudier les variations de f et déterminer $f(]0, +\infty[)$.

2. Représenter la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

3. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, montrer que $f(\varphi) = \varphi$.

4. On se propose de construire une suite (x_n) de rationnels qui converge vers φ.

On pose $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.

a. Calculer et représenter les réels x_1, x_2, x_3 et x_4.

b. Montrer que pour tout entier n, x_n est un rationnel positif.

c. Montrer que $|x_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_n - \varphi|$.

d. Conclure.

21 Soit (u_n) la suite définie par

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que (u_n) est croissante.

2. a. Vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$.

3. Soit p un entier naturel tel que $p \geq 3$.

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, $n \geq 1$.

a. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n \leq u_n$.

c. En déduire que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ' et que $\ell' \leq 2$.

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn